Teorie 11.2.

pátek 12. února 2021 1:47

(1) (b) (i) ano, stačí zvolit ekvidistantní dělení

$$x_k = 2\frac{k}{n} + 3 \quad k = 0, \dots, n \quad \text{pro } \frac{2}{n} < \varepsilon$$

(ii) ne, stačí zvolit D s dělícími body $3, 4, 5$

a D^* s dělícími body $3, 3.5, 4, 5$.

Potom D^* je zjemnění D, ale $|D^*| = 1 = |D|$

(iii) neplatí, stačí zvolit D s dělícími body 3 a 5

D^* s dělícími body $3, 3.5, 5$ a

D^{**} s dělícími body $3, 4.5, 5$.

Tady $|D^*| = 1.5 = |D^{**}|$.

(iv) ne, tady funguje mnoho protipříkladů, stačí např. zvolit f, která není riemannovsky integrovatelná (třeba Dirichletova funkce), nebo i $f(x) = x$

(v) ne, stačí zvolit f konstantní

(vi) ano, rovnou z definice $(M_k^D \geq m_k^D)$, je i součástí věty o vlastnostech dělení.

(vii) ano, stačí zvolit Dirichletovu funkci, $g(x) = x$, kde je to vidět hned, stačí dokonce jakákoliv nekonstantní funkce.

Pozn. V zadané verzi u zkoušky byl v bodu (vii) překlep (f zaměněné za g v $S(g,D) > s(g,D)$), čímž se úloha víceméně převedla na bod (v). Akceptována byla řešení obou variant.

(2) (d) (i), (ii), obojí platí, můžeme počítat

$$f \text{ sudá} \Rightarrow f'(-a) = \lim_{x \to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x \to -a} \frac{f(-x)-f(a)}{-x-a}$$

VOLSF

$$= -\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = -f'(a)$$

$$f \text{ lichá} \Rightarrow f'(-a) = \lim_{x \to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x \to -a} \frac{-f(-x)+f(a)}{-(-x)+a}$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{f(a)-f(t)}{a-t} = f'(a)$$

Pak už stačí jen výše uvedená tvrzení střídavě aplikovat

$$f \text{ sudá} \Rightarrow f' \text{ lichá} \Rightarrow f'' = (f')' \text{ sudá} \Rightarrow f''' = (f'')' \text{ lichá}$$

$$\Rightarrow f^{(4)} = (f''')' \text{ sudá} \Rightarrow f^{(5)} = (f^{(4)})' \text{ lichá}$$

(iii) neplatí, stačí položit $f(x) = \cos x$

(iv) neplatí, stačí zvolit libovolnou funkci, která je konstantní na okolí bodu 0 a je sudá, např.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^6 & x \geq 1 \\ (x+1)^6 & x \leq -1 \\ 0 & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Pozn. V bodě (iv) došlo k nedopatření, kdy jsem napsal lokální místo globální maximum, kde by pak tvrzení platilo, protože lichá funkce může mít globální extrém v bodě 0 pouze, pokud je konstantní 0. Pokud je ale $f^{(5)}$ konstantní 0, potom je f polynom (v našem případě dokonce ve speciálním tvaru $Ax^4 + Bx^2 + C$, protože f má být sudá).

(3) (a) (i) neplatí, stačí zvolit $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-3,4)$

(ii) neplatí, stačí zvolit $f(x) = 7\operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-3,4)$.

(iii) platí, protože $\sqrt{3} \in (-3,4) \setminus \mathbb{Q}$,

je f spojitá v bodě $\sqrt{3}$. Volme posloupnost

$a_n \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$.

Taková existuje, protože racionální čísla jsou hustá v $\mathbb{R}$. Potom (za pomoci Heineho věty)

$$f(\sqrt{3}) = \lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} 7 = 7.$$